Leçon 235 - Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales. Exemples et applications.

1. Théorie générale : existence, unicité et forme des solutions.—

1. Interversion de limites et convergence uniforme. —

- Une limite uniforme de fonctions continues est continue.
- contre-ex pour C^1
- Premier théorème d'interversion des limites :
  Si f_n CV univ, alors $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}$
  (contre-ex : $x \mapsto x^n$ en 1)
- Produit de Cauchy de séries
- Interversion série-série (série de la série des modules est CV)
- Contre-ex : $u_{n,p} = 1$ si $n = 0$, $\frac{-1}{2^n}$ si $n \geq 1$
- Si la suite des f_n' CV uniformément et si f_n CV en un point, alors la limite est C^1.

2. Régularité des séries entières. —

- Régularité d'une série entière dans le disque de convergence.
- Analyticité
- Formule de Cauchy $r^n.a_n = \frac{1}{2\pi}.\int_0^{2\pi} f(r.e^{it}).e^{-int}dt$
- Problèmes au bord (définition, continuité, prolongement)
- Abel angulaire + Taubérien faible
- $\sum_{n\geq 0} z^n$ ne converge pas en 1 et -1, mais sa fonction associée est prolongeable.
- Lacunes de Hadamard (+ex : $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2}z^{2^n}$)

2. Interversions limite-intégrale. —

1. Intégrales de suites/séries de fonctions. —

- Convergence monotone
- Lemme de Fatou $\int \liminf \leq \liminf \int$
- Si K est un compact et $f_n \in C^0$ est unif CV, alors $\int_K f_n(t)dt \to \int_K f(t)dt$.
- Interversion intégrale-série (si la série de l'intégrale est alternée) ($\sum_{n\geq 0}\int_0^1 (-x)^n dx = ln(2)$)
- Théorème de Weierstrass holomorphe (la limite unif sur tout compact d'une suite holom est holom)(se prouve en montrant que la primitive vérifie la formule de Cauchy)

2. Théorème de convergence dominée. —

- Théorème de convergence dominée
- Interversion intégrale-série (si la série de l'intégrale des modules est CV)
- Def+Prop : Approximations de l'unité
- Ex : Théorème de Féjer (les K_n sont une approximation de l'unité)
- contre-ex du théorème

3. Fonctions définie par une intégrale dépendant d'un paramètre. —

- Théorème de continuité des IàP
- Théorème de dérivabilité des IàP
- Théorème d'holomorphie des IàP
- Exemples
- **Dev** : Formule des compléments : $\Gamma(z)\Gamma(z+1) = \frac{\pi}{sin(\pi z}$ $\forall z$ tq $0 < Re(z) < 1$.
  Cela permet de prolonger analytiquement la fonction Γ à $\mathbb{C} - \{-n, n \in \mathbb{N}\}$.

3. Séries de Fourier et transformation de Fourier. —

1. Applications aux séries de Fourier. —

- Définition d'une série de Fourier
- Formule de Parseval : isométrie entre $L^2(\mathbb{T})$ et $L^2(\mathbb{Z})$ (démo via la densité des poly trigo de Féjer)
- Cas des fonctions holomorphes : $\sum_{n\geq 0}|a_n|^2.r^{2n} = \frac{1}{2\pi}.\int_0^{\pi}|f(0+r.e^{it})|^2 dt$
- Théorème de Dirichlet pour la convergence ponctuelle de la série de Fourier
- **Dev** : Equation de la chaleur sur le cercle

2. Applications à la transformation de Fourier. —

- Définition de F, continuité de $F(f)$. $\|F(f)\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$. $F(f*g) = F(f).F(g)$
- Riemann-Lebesgue : $F(f) \in C_0^0(\mathbb{R})$
- Si $x \mapsto x.f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $F(f) \in C^1(\mathbb{R})$.
- Continuité de l'opérateur de translation en 0 sur $L^p(\mathbb{R})$.
- Poser $H_\lambda(t) = \frac{1}{2\pi}e^{-|\lambda t|}$. $h_\lambda(x) = F(H_\lambda)(x) = \frac{1}{\pi}.\frac{\lambda^2}{x^2+\lambda^2}$ pour avoir une suite d'approximations de l'unité
- Formule de la transformée de Fourier inverse, démontrée avec h_λ. $f(-x) = 2\pi.F(F(f))(x)$ pour la mesure de Lebesgue. (si on prend $dm = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}d\mu$, les 2π s'en vont)
- Injectivité de la transformée de Fourier.
- Transformée de Fourier de la gaussienne
- Invariance par F de l'espace de Schwarz

Références

Pommellet : Gros du plan
Rudin : Partie transformée de Fourier.
Amar-Materon : Formule des compléments (Dev)
Candelpergler : Equation de la chaleur sur le cercle (Dev)

June 11, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes